نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **درجه ۲**

سوال ۱

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

x_1 و x_2 در معادله صدق می‌کنند، پس:

$$x_1^2 - 2 = 7x_1 \Rightarrow 2x_1^2 - 4 = 14x_1 \quad (I)$$
$$x_2^2 - 2 = 7x_2 \Rightarrow 5x_2^2 - 10 = 35x_2 \quad (II)$$
$$\xrightarrow{(II),(I)} \frac{2x_1^2 - 4}{3x_1} + \frac{4x_2}{5x_2^2 - 10} = \frac{14x_1}{3x_1} + \frac{4x_2}{35x_2} = \frac{14}{3} + \frac{4}{35}$$
$$= \frac{502}{3 \times 35} = \frac{502}{105}$$

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

$$2x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{3}{2} \\ P = \alpha\beta = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

ریشه‌های معادلهٔ مورد نظر از معکوس ریشه‌های معادلهٔ بالا یک واحد کمتر است، بنابراین ریشه‌های آن به‌صورت $\frac{1}{\alpha} - 1$ و $\frac{1}{\beta} - 1$ است، لذا:

$$S' = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) + \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} - 2 = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}} - 2 = -5$$

$$P' = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\left(\frac{1}{\beta} - 1\right) = \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{1-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} + 1$$

$$= \frac{1-\frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}} + 1 = 2$$

پس معادله به‌صورت زیر است:

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 2 = 0$$

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

$$۲x^۲ - ۳x - ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{۳}{۲} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

ریشه‌های جدید $\{\alpha\beta^۳, \alpha^۳\beta\}$

$$S_{\text{جدید}} = \alpha\beta^۳ + \alpha^۳\beta = \alpha\beta(\alpha^۲ + \beta^۲) = P(S^۲ - ۲P)$$

$$= -\frac{۱}{۲}(\frac{۹}{۴} + ۱) = \frac{-۱۳}{۸}$$

$$P_{\text{جدید}} = (\alpha\beta^۳)(\alpha^۳\beta) = (\alpha\beta)^۴ = P^۴ = (-\frac{۱}{۲})^۴ = \frac{۱}{۱۶}$$

معادلهٔ جدید $x^۲ - Sx + P = ۰ \Rightarrow x^۲ + \frac{۱۳}{۸}x + \frac{۱}{۱۶} = ۰$

$$\Rightarrow ۱۶x^۲ + ۲۶x + ۱ = ۰ \Rightarrow k = ۲۶$$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

α ریشهٔ معادله است پس باید در آن صدق کند.

$$\alpha^۲ - ۳\alpha - ۵ = ۰ \Rightarrow \alpha^۲ = ۳\alpha + ۵ \xrightarrow{\times\alpha}$$

$$\alpha^۳ = ۳\alpha^۲ + ۵\alpha \xrightarrow{\alpha^۲ = ۳\alpha + ۵} \alpha^۳ = ۱۴\alpha + ۱۵$$

$$\alpha^۳ + ۱۴\beta = ۱۴\alpha + ۱۵ + ۱۴\beta = ۱۴(\alpha + \beta) + ۱۵ = ۱۴S + ۱۵$$

$$\xrightarrow{S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-۳)}{۱}} \alpha^۳ + ۱۴\beta = ۱۴ \times ۳ + ۱۵ = ۵۷$$

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

$$۴x^۲ - ۵x - ۴ = ۰ \xrightarrow{\text{ریشه}} ۴\alpha^۲ - ۵\alpha - ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow ۴\alpha^۲ = ۵\alpha + ۴$$

از طرفی $\alpha\beta = -۱$ و $\alpha + \beta = \frac{۵}{۴}$، پس داریم:

$$A = -۴\alpha^۲(\alpha\beta) + ۵\beta = -(۵\alpha + ۴)(-۱) + ۵\beta$$

$$= ۵(\alpha + \beta) + ۴ = ۵(\frac{۵}{۴}) + ۴ = \frac{۴۱}{۴}$$

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

$\alpha + \beta = -۲ , \ \alpha\beta = -۴$

عبارت $= ۲\alpha\beta^۴ - \alpha^۲\beta^۴ + ۲\alpha^۳\beta^۲ + ۴\alpha^۲\beta^۳$

$= -\alpha^۲\beta^۴ + ۲\alpha\beta^۴ + ۲\alpha^۳\beta^۲ + ۴\alpha^۲\beta^۳$

$= -\alpha^۲\beta^۴ + ۲\alpha\beta^۲(\beta^۲ + \alpha^۲ + ۲\alpha\beta)$

$= -(\alpha\beta)^۲\beta^۲ + ۲\beta(\alpha\beta)(\alpha + \beta)^۲$

$= -۱۶\beta^۲ - ۳۲\beta = -۱۶(\beta^۲ + ۲\beta) = -۱۶(۴) = -۶۴$

توجه کنید که: β ریشه $\Rightarrow \beta^۲ + ۲\beta - ۴ = ۰ \Rightarrow \beta^۲ + ۲\beta = ۴$

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

اگر ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم معکوس یکدیگر باشند، حاصل‌ضرب آن‌ها برابر یک می‌شود، یعنی:

$P = \frac{c}{a} = \frac{۲m+۶}{۲} = ۱ \Rightarrow ۲m + ۶ = ۲$

$\Rightarrow ۲m = -۴ \Rightarrow m = \frac{-۴}{۲} = -۲$

حال در معادله به جای m، ۲- قرار می‌دهیم:

$\Rightarrow$ معادله : $۲x^۲ + ۳(-۲)x + ۲(-۲) + ۶ = ۰$

$\Rightarrow ۲x^۲ - ۶x + ۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$

$\Rightarrow$ مجموع دو ریشه : $S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-۳)}{۱} = ۳$

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

در معادلهٔ $-3x^2 - 4x + 6 = 0$ داریم:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-4)}{-3} = -\frac{4}{3} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{6}{-3} = -2 \end{cases}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} S' = (3\alpha - 1) + (3\beta - 1) = 3(\alpha + \beta) - 2 \\ \quad = 3 \times (-\frac{4}{3}) - 2 = -6 \\ P' = (3\alpha - 1)(3\beta - 1) = 9\alpha\beta - 3(\alpha + \beta) + 1 \\ \quad = 9 \times (-2) - 3 \times (-\frac{4}{3}) + 1 = -13 \end{cases}$$

معادلهٔ جدید برابر است با:

$$x^2 - S'x + P' = 0$$

$$x^2 - (-6)x - 13 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x - 13 = 0$$

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

$$x^2 - x - 3 = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha\beta = -3 \end{cases}$$

اگر α و β را در معادله اولیه جای‌گذاری کنیم آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \alpha - 3 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 3 = \alpha \xrightarrow{\times\alpha} \alpha^3 - 3\alpha = \alpha^2 \\ \beta^2 - \beta - 3 = 0 \Rightarrow \beta^2 - 3 = \beta \xrightarrow{\times\beta} \beta^3 - 3\beta = \beta^2 \end{cases}$$

حال معادله جدید را می نویسیم:

$$\begin{cases} S' = (\alpha^3 - 3\alpha) + (\beta^3 - 3\beta) = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 1 + 6 = 7 \\ P' = (\alpha^3 - 3\alpha)(\beta^3 - 3\beta) = \alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = 9 \end{cases}$$

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 9 = 0$$

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

اگر ریشه‌های معادله $x^۲ - ۲x - ۲ = ۰$ را α و β فرض کنیم، ریشه‌های معادله $۲x^۲ + ax + b = ۰$ برابر $-\frac{۱}{\alpha}$ و $-\frac{۱}{\beta}$ می‌باشد؛

$$x^۲ - ۲x - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = ۲ \\ P = \alpha\beta = -۲ \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} S' &= -\frac{۱}{\alpha} - \frac{۱}{\beta} = -(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}) = -(\frac{۲}{-۲}) = ۱ \\ P' &= (-\frac{۱}{\alpha})(-\frac{۱}{\beta}) = \frac{۱}{\alpha\beta} = \frac{۱}{-۲} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow x^۲ - S'x + P' = ۰ \Rightarrow x^۲ - x - \frac{۱}{۲} = ۰$$

$$\xrightarrow{\times ۲} ۲x^۲ - ۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow a + b = -۲ - ۱ = -۳$$